

Разработка модели системы газоснабжения на основе открытых данных для исследования живучести

Алексей Еделев^{1,2}, Глеб Данилов¹, Ольга Башарина^{1,3}

¹ Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, ул. Лермонтова, д. 134, 664033, Иркутск, Россия

² Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, ул. Лермонтова, д. 130, 664033, Иркутск, Россия

³ Уральский государственный экономический университет, ул. 8 Марта, д. 62, 620144, г. Екатеринбург, Россия

Аннотация

В данной статье описывается процесс разработки модели системы газоснабжения Европы на основе открытых данных, полученных в Ольденбургском институте сетевых систем энергетики (Германия). Необходимость разработки новых моделей отраслевых систем энергетики в настоящее время диктуется тем, что большинство подходов в области исследований живучести систем энергетики фокусируются на рассмотрении только одной из двух составляющих живучести, адаптации системы к крупным возмущениям или восстановлении производительности системы после крупного возмущения. Такая односторонность исследований приводит к выработке неэффективных стратегий по повышению живучести систем энергетики. Новые модели систем энергетики позволят более реалистично и точно моделировать функционирование этих систем в экстремальных условиях на всём интервале выживания, а не только во время их адаптации или восстановления. В настоящее время с помощью ряда инструментов и технологий ИДСТУ СО РАН построена современная схема газоснабжения Европы, а также осуществляется подготовка данных для расчёта потоков природного газа по построенной структуре системы газоснабжения.

Ключевые слова

Живучесть, модели систем энергетики, большие трубопроводные системы, открытые данные

1. Введение

Системы энергетики (СЭ) предназначены для добычи (производства, получения), переработки (преобразования), передачи (транспортирования), хранения и распределения энергоресурсов и снабжения ими потребителей [1]. Они относятся к критическим инфраструктурам, т.е. таким системам, нарушение функционирования которых отрицательно влияет на экономику страны и благополучие общества [2].

В основе функционирования и развития СЭ лежат требования надёжности, позволяющие данным системам справляться с уже известными возмущениями, вероятность возникновения которых высока, а по масштабу последствий их можно характеризовать как мелкие и средние. Однако, в настоящее время резко вырос интерес к исследованию способности СЭ выживать при столкновении с крупными возмущениями [3], вероятность возникновения которых весьма мала или достоверно неизвестна, а их воздействие может привести к тому, что СЭ без дополнительных мер не сможет далее выполнять возложенные на неё функции. При этом

6th International Workshop on Information, Computation, and Control Systems for Distributed Environments (ICCS-DE 2024), July 01–05, 2024, Irkutsk, Russia

EMAIL: flower@isem.irk.ru (A. 1); dangleb@isem.irk.ru (A. 2); basharinaolga@mail.com (A. 3)

ORCID: 0000-0003-2219-9754 (A. 1); 0000-0002-7151-782X (A. 3)



© 2024 Copyright for this paper by its authors. Use permitted under Creative Commons License Attribution 4.0 International (CC BY 4.0).

ICCS-DE 2024 Workshop Proceedings

DOI: 10.47350/ICCS-DE.2024.14

изучается реакция СЭ на наступление таких экстремальных условий, последствия для потребителей, компенсация нежелательных последствий [4] и процесс восстановления системы [5].

Данная способность СЭ противостоять крупным возмущениям, не допуская их каскадного развития с массовым нарушением режима энергоснабжения потребителей, и восстанавливать исходное состояние объекта или близкое к нему, называется живучестью [1]. Главной целью исследования живучести является построение стратегий управления развитием и функционирования СЭ, которые позволяют эффективно адаптироваться к крупным возмущениям и восстанавливаться после них.

2. Проведение исследований живучести СЭ

Отправной точкой в современных исследованиях живучести СЭ являются источники (механизмы генерации) кривых живучести или временных рядов данных, представляющих состояния системы в последовательные моменты времени крупного возмущения [1, 6].

Говоря формально, состояние СЭ в момент времени $t = t_0, \dots, T$ описывается вектором x , в состав которого входят структурные и режимные параметры объектов энергетики, а также природно-климатические, социальные, экономические и прочие параметры, представляющие условия внешней среды. Если X это последовательность состояний СЭ $\{x^{t_0}, \dots, x^T\}$, то показатель производительности является функцией $P(t): X \rightarrow \mathbb{R}$, преобразующей x^t в скалярную величину (рис. 1). Поведение СЭ на определённом интервале времени характеризуется сводной метрикой $D: P \rightarrow \mathbb{R}$, которая сворачивает участок кривой живучести на рассматриваемом интервале времени в скалярную величину [6].

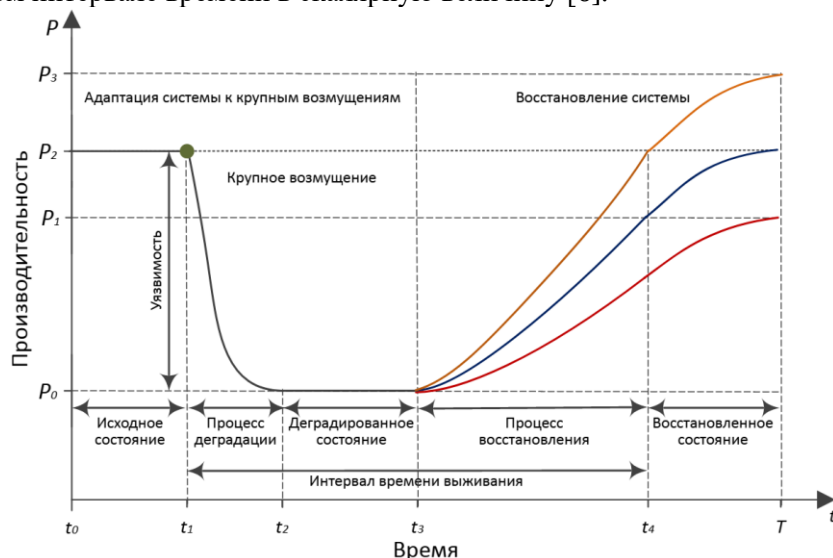


Рисунок 1: Идеализированная кривая живучести СЭ

Если показатели производительности отражают по большей части технологические или территориальные особенности СЭ, то сводные метрики характеризуют различные этапы поведения СЭ на интервале выживания (рис. 1).

Источники кривых живучести могут варьироваться в широких пределах: исторические данные, натурные опыты, агентное и имитационное моделирование системной динамики, искусственные нейронные сети, сетевые потоковые методы [7]. К последним относятся потоковые модели СЭ [21], которые можно записать в следующем общем виде:

$$\min_x C(X) \quad (1)$$

$$g_i(X) \leq 0, i = 1, \dots, I, \quad (2)$$

$$h_j(X) = 0, j = 1, \dots, J, \quad (3)$$

где X — искомая последовательность состояний СЭ, C — функция экономических затрат. Неравенства g_i в количестве I из (2) и равенства h_j в количестве J из (3) представляют разнообразные требования к функционированию и развитию СЭ.

Переход к оценке возможностей СЭ по адаптации к конкретному крупному возмущению $\hat{v}$ происходит путём добавления в модель (1)-(3) вектора критериев живучести F :

$$\min_{X \in S(\hat{v})} R(X, \hat{v}) = (C(X, \hat{v}), F(X, \hat{v})) \quad (4)$$

где S – множество допустимых планов распределения потоков энергоресурсов в условиях, определяемых ограничениями (2), (3) и воздействием возмущения $\hat{v}$. Критерии F могут быть сводными метриками D для оценки живучести СЭ.

Параметризируя $\hat{v}$ в (2), получается двухуровневая постановка для поиска наихудшего сценария возмущения из множества крупных возмущений V :

$$\max_{v \in V} \min_{X \in S(v)} R(X, v) \quad (5)$$

Аналогичным способом можно получить трехуровневую постановку для выбора наилучших мер по повышению живучести СЭ из множества W при реализации наихудшего возмущения из множества V :

$$\min_{w \in W} \max_{v \in V} \min_{X \in S(v, w)} R(X, v, w), \quad (6)$$

где S – множество допустимых планов распределения потоков энергоресурсов в условиях реализации возмущения $v \in V$ и меры по повышению живучести $w \in W$.

Вышеописанный процесс преобразования математической постановки (1) в (4) образует схему итеративного построения исследований живучести СЭ. Эта схема даёт возможность взглянуть на структуру исследований живучести глобально и правильно организовать вычислительные эксперименты, которые являются основным средством проведения исследований живучести СЭ в силу невозможности проведения натурных опытов на них [1].

Организацией и проведением вычислительных экспериментов занимается предметно-ориентированная среда (ПОС), под которой понимается совокупность программно-аппаратных средств, позволяющих её конечным пользователям решать один или несколько классов задач некоторой предметной области. В данном случае ПОС учитывает особенности исследований живучести СЭ [8] и отображает представленную выше схему построения исследований живучести на вычислительные инфраструктуры с помощью разработанных в ИДСТУ СО РАН ряда инструментов и технологий их применения. В их число входят:

- распределённые пакеты прикладных программ (РППП), предназначенные для решения определённого класса задач [9];
- инструментарий ГеоАРМ [10] для создания автоматизированных рабочих мест, которые позволяют исследователю работать с исходными данными, включая слабоструктурированные, взаимодействовать с РППП, анализировать результаты вычислительных экспериментов.

3. Особенности моделирования отраслевых СЭ при исследовании их живучести

В основе архитектуры РППП для исследований живучести СЭ лежит обобщённый подход к моделированию взаимосвязанных технических систем, который основан на следующих принципах [11]:

- явное разделение моделирования любой системы на топологическую и функциональную составляющую;
- представление взаимосвязанных систем в виде метасистемы для моделирования их взаимодействия.

Согласно первому принципу, структурная модель отраслевой СЭ представляет собой сеть или направленный граф $G = (N, E)$, где N – это множество, состоящее из $n = |N|$ узлов, E – это множество, состоящее из $m = |E|$ дуг.

Множество узлов N делится на следующие подмножества: источники N_b , потребители N_d , промежуточные узлы N_o и хранилища N_c . Узлы могут быть выделенными реальными источниками, хранилищами или потребителями энергоресурсов. Однако чаще всего они представляют собой агрегированные группы объектов, которые имеют сходную

функциональность, достаточно однородны по своим характеристикам или располагаются в одном районе. Все узлы имеют географические координаты.

Для каждой дуги $(i, j) \in E$ узел $i \in N$ является началом, а узел $j \in N$ – концом. Также как в случае с узлами, дуги могут являться настоящими объектами транспорта, но в большинстве случаев они представляют собой агрегированные производственные возможности по передаче энергоресурсов.

Функциональная модель отраслевой СЭ описывает технологические цепочки от производства (добычи) до потребления отдельных видов энергоресурсов и может быть записана в виде следующей задачи линейного программирования [12]:

$$c^T x \rightarrow \min, \quad (7)$$

$$Ax = r, \quad (8)$$

$$\underline{x} \leq x \leq \bar{x}, \quad (9)$$

где c – вектор удельных затрат по технологическим способам функционирования действующих, реконструируемых или модернизируемых, а также вновь сооружаемых энергетических объектов; A – матрица технологических коэффициентов производства (добычи), переработки, транспорта, хранения и потребления энергоресурсов; x – искомый вектор, который, как следует из введения, характеризует интенсивность применения технологических способов функционирования энергетических объектов; $\bar{x}$ – вектор, определяющий максимальные технически возможные интенсивности применения технологических способов функционирования энергетических объектов; $\underline{x}$ – вектор, определяющий минимально технически требуемые интенсивности применения технологических способов функционирования энергетических объектов; r – вектор, задающий максимально возможные объёмы производства (отрицательные компоненты) и потребления энергоресурсов (положительные компоненты).

Говоря в целом, задача (7)–(9) находит поток минимальной стоимости по сети G . Если элемент a_{ij} матрицы A равен 1 для всех дуг $(i, j) \in E$ (каждый столбец матрицы A содержит только -1 и/или $+1$), то сеть G называется простой. Если a_{ij} не равен 1 хотя бы для одной дуги $(i, j) \in E$, то сеть G называется обобщенной.

Известно, что методы решения задач (7)–(9) для простых сетей [13] существенно более эффективны в вычислительном плане и, соответственно, намного быстрее, чем для обобщенных сетей. Если ранг матрицы A равен $n-1$, то любая обобщенная сеть может быть преобразована в простую с помощью специальных процедур масштабирования. В противном случае, если потери энергоресурсов при передаче довольно малы или удельные расходы при преобразовании близки к единице, то для повышения скорости решения потоковых задач множителями a_{ij} можно пренебречь, то есть считать их равными 1.

Последний способ используется в существующих моделях систем газоснабжения, нефте- и нефтепродуктоснабжения [14, 15], разработанных в ИСЭМ СО РАН для исследований живучести. Существенным недостатком данных моделей является их однопериодность, следствиями которой являются отсутствие динамики и упрощенное моделирование экстремальных условий функционирования СЭ.

Первое следствие однопериодности вышеуказанных моделей СЭ – статичность делает их пригодными только для исследования первой из сторон живучести: оценки системных возможностей по адаптации к крупным возмущениям, где одним из классов задач является анализ уязвимости [2]:

$$\max_{v \in V} \min_{X \in S(v)} \Lambda(X, v), \quad (10)$$

где метрика Λ отвечает за определение максимального падения производительности (рис. 1) вследствие воздействия крупного возмущения $v \in V$.

Второе следствие в виде упрощенного моделирования экстремальных условий функционирования СЭ, например неизменно постоянная пиковая потребность в энергоресурсах может привести к недопустимому завышению значений сводной метрики Λ [16].

Как результат, согласно работе [17] при равных экономических затратах стратегии, повышающие живучесть СЭ на всём интервале выживания, более эффективны чем стратегии, ориентированные только на снижение уязвимости.

Для решения перечисленных выше проблем, вызванных односторонностью исследований живучести, необходимы многопериодные потоковые модели, которые формируются как набор копий простой или обобщённой сети G , по одной на каждый момент времени $t = t_0, \dots, T$. Эти копии связываются между собой дугами, которые передают величину запасов энергоресурсов в хранилищах из одного периода времени в другой.

Новые функциональные модели систем газоснабжения, нефте- и нефтепродуктоснабжения позволят более реалистично и точно моделировать функционирование этих СЭ в экстремальных условиях. Например, падение давления газа вследствие воздействия крупного возмущения на газотранспортную сеть, может сказываться на ближайших к месту аварии потребителях через несколько часов, а на наиболее удалённых – через сутки и более. Также новые модели позволят исследовать зависимость системной производительности от непостоянства нагрузки и вариативности технических характеристик оборудования СЭ во время крупного возмущения и после него. Эта возможность является наиболее востребованной для трехуровневых задач оптимизации живучести (6), где внутри происходит оптимизация параметров работы СЭ в экстремальных условиях, задаваемых возмущениями $v \in V$.

4. Роль открытых данных в энергетических исследованиях

Открытость данных играет важную роль в разработке новых методов для решения задач (4)-(6), так как для сравнения их эффективности с другими подобными методами требуются четко определенные, реалистичные тестовые задачи. Примерами библиотек эталонных тестов, широко используемых в численной оптимизации, являются MINLPLib и MIPLIB. В сфере энергетики усилия в данном направлении направлены на разработку:

- программных платформ с открытым исходным кодом для оптимизации СЭ, например, Temoa с линейной эталонной моделью Utopia;
- открытых источников информации, содержащих массивы данных по энергетике страны или полные спецификации электростанций;
- общедоступных коллекций эталонных схем конкретных СЭ.

Если перейти к системам газоснабжения, то коллекция газотранспортных сетей GasLib широко применяется в различных исследованиях систем газоснабжения, включая их живучесть. В качестве известных открытых источников информации можно привести модель системы газоснабжения Бельгии. Результатом 3-хлетнего проекта SciGRID_gas, выполненного в Ольденбургском институте сетевых энергетических систем, стали выложенные в открытый доступ массивы данных по системе газоснабжения Европейского союза [76].

5. Создание модели системы газоснабжения Европы на основе данных проекта SciGRID_gas

В рамках проекта SciGRID_gas были получены три массива данных различной детализации по системе газоснабжения Европейского союза: IGGIELGNC-1, IGGIELGNC-2 и IGGIELGNC-3. Каждый из трёх массивов данных представляет собой набор текстовых файлов, содержащих список атрибутов объектов различных типов, и сами значения атрибутов. Также в рамках этого проекта были получены массивы данных SciGRID_gas CONS, которые содержат ежедневное потребление природного газа с 2010 по 2019 год с разбивкой на промышленный, жилой и коммерческий сектора для всех регионов стран Европейского союза.

В массивах данных IGGIELGNC-1, IGGIELGNC-2 и IGGIELGNC-3 выделяются четыре типа объектов: объекты добычи, объекты магистрального транспорта, объекты подземного хранения и объекты потребления. К объектам добычи можно условно отнести все объекты, выдающие газ в сеть магистрального транспорта, в том числе месторождения, терминалы сжиженного природного газа (СПГ) и подземные хранилища газа (ПХГ), если рассматриваемый момент времени совпадает со временем отбора газа из ПХГ. К объектам магистрального транспорта газа относятся участки магистральных газопроводов (МГ), включающие линейную часть и компрессорные станции (КС), расположенные на ней, а также пограничные пункты для

измерения объёмов газа, перемещаемого между странами. К объектам потребления продукции относятся группы потребителей, осуществляющих отбор газа из магистральных газопроводов в точках подключения к ним распределительных газопроводов, электростанции, работающие на газе, и ПХГ, если рассматриваемый момент совпадает с периодом закачки газа в ПХГ. Группы потребителей газа включают домашние хозяйства, промышленные предприятия и коммерческие объекты.

Согласно принципам подхода к моделированию СЭ, описанным выше, модель системы газоснабжения Европы на основе данных проекта SciGRID_gas делится на две части: топологическую и функциональную. Разработка модели СЭ начинается с топологической составляющей. Слабоструктурированные данные, которые представляют собой массивы IGGIELGNC-1, IGGIELGNC-2 и IGGIELGNC-3, были преобразованы авторами в соответствующие реляционные БД с помощью инструментария ГеоАРМ. Этот же инструментарий предоставляет возможности по редактированию структурной модели СЭ (рис. 2).

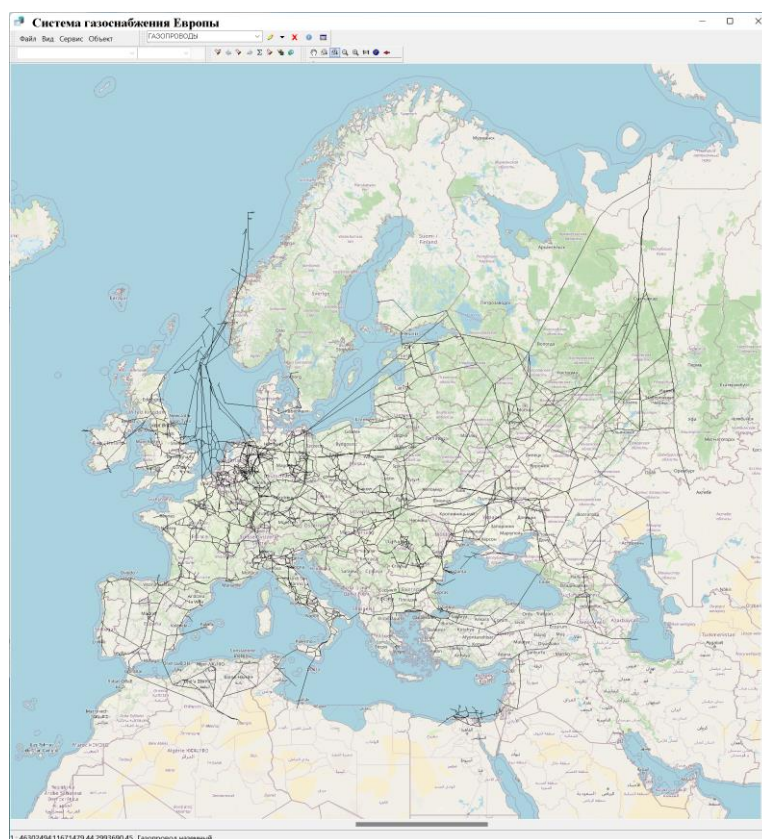


Рисунок 2: Структура системы газоснабжения Европы

В настоящее время авторами проводится верификация и валидация данных, необходимых для построения функциональной модели СЭ. Причиной проведения этих процедур является то, что многие значения атрибутов объектов ЭС в проекте SciGRID_gas были получены оценочным путём. Например, точные направления потока на большинстве участков МГ остаются неизвестными. Более того, некоторые участки МГ способны работать в двух направлениях. Поэтому, авторами проекта SciGRID_gas был разработан эвристический метод определения направления потока газа.

Необходимость верификации и валидации данных также подтверждается работой [19], в которой массивы данных SciGRID_gas использовались для создания газотранспортной сети Германии. В [19] сказано, что во время очистки данных были найдены и удалены 10 изолированных подсетей, которые не были связаны с основной сетью. Также было удалено примерно 50 участков МГ, у которых один и тот же узел был указан как входной и выходной, а длина этих участков МГ была установлена нулевой.

Валидация данных из массива SciGRID_gas CONS по Германии в работе [19] была проведена путём их сопоставления с подобными данными из БД DemandRegio. Результаты сравнения

показали, что для промышленного сектора DemandRegio, как правило, устанавливает более высокие значения спроса на природный газ, чем SciGRID_gas CONS. Что касается жилого и коммерческого секторов, то значения в этих массивах данных практически совпадают.

В ходе верификации и валидации данных выяснилось, что решатель задач линейного программирования Ip_solve, использующийся в существующих моделях отраслевых СЭ, разработанных в ИСЭМ СО РАН для исследований живучести, плохо справляется с размерностью модели газоснабжения Европы. Поэтому, авторами был выполнен переход на современные пакеты математической оптимизации SCIP [20] и HiGHS [21].

6. Заключение

В данной статье описывается процесс разработки модели системы газоснабжения Европы на основе открытых данных, полученных в Ольденбургском институте сетевых энергетических систем (Германия). Необходимость разработки новых моделей отраслевых СЭ в настоящее время диктуется тем, что большинство подходов в области исследований живучести СЭ фокусируются на рассмотрении только одной из двух составляющих живучести: адаптации системы к крупным возмущениям или восстановлении производительности системы после крупного возмущения. Такая односторонность исследований приводит к выработке неэффективных стратегий по повышению живучести СЭ. Новые модели СЭ позволят более реалистично и точно моделировать функционирование этих систем в экстремальных условиях на всём интервале выживания, а не только во время их адаптации или восстановления.

В настоящее время с помощью ряда инструментов и технологий ИДСТУ СО РАН построена современная схема газоснабжения Европы, а также осуществляется подготовка данных для расчёта потоков природного газа по построенной структуре системы газоснабжения.

7. Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-29-00460.

8. Список литературы

- [1] Надежность систем энергетики и их оборудования / Под общей редакцией Ю.Н. Руденко: В 4-х т. Т. 1: Справочник по общим моделям анализа и синтеза надежности систем энергетики / Под ред. Ю.Н. Руденко. М.: Энергоатомиздат, 1994. 480 с.
- [2] Zio E. Challenges in the vulnerability and risk analysis of critical infrastructures // Reliability Engineering and System Safety. 2016. Vol. 152. P.137-150.
- [3] Gasser P., Lustenberger P., Cinelli M., Kim W., Spada M., Burgherr P., Hirschberg S., Stojadinović B., Sun T. Y. A review on resilience assessment of energy systems // Sustainable and Resilient Infrastructure. 2019. P. 1–27.
- [4] Воропай Н. И., Криворуцкий Л.Д., Руденко Ю.Н., Шер И.А. Основные методические принципы исследования и обеспечения живучести систем энергетики // Антонов Г.Н., Черкесов Г.Н., Криворуцкий Л.Д. Методы и модели исследования живучести систем энергетики. Новосибирск: Наука. Сибирское отделение, 1990. 285 с.
- [5] Voropai, N., Rehtanz, C., 2019. Flexibility and Resiliency of Electric Power Systems: Analysis of Definitions and Content. In EPJ Web of Conferences (Vol. 217, p. 01018). EDP Sciences.
- [6] Poulin C.R., Kane M.B. Infrastructure resilience curves: Performance measures and summary metrics. Reliability Engineering & System Safety. 2021. Vol. 216. P. 107926. DOI: 10.1016/j.ress.2021.107926.
- [7] Иерархическое моделирование систем энергетики / под. ред. Н.И. Воропая, В.А. Стенникова. Новосибирск: Академическое изд-во «Гео», 2020. 314 с.
- [8] Еделев А.В., Карамов Д.Н., Башарина О.Ю. Методика оценки живучести автономной микросети // Информационные и математические технологии в науке и управлении. 2023. – № 4(32). С.117-126. DOI: 10.25729/ESI.2023.32.4.010.

- [9] Бычков И.В., Горский С.А., Еделев А.В., Костромин Р.О., Сидоров И.А., Феокистов А.Г., Фереферов Е.С., Федоров Р.К. Поддержка управления живучестью систем энергетики на основе комбинаторного подхода // Известия РАН. Теория и системы управления. 2021. № 6. С. 122–135. DOI: 10.31857/S000233882106007X.
- [10] Фереферов Е.С., Бычков И.В., Хмельнов А.Е. Технология разработки приложений баз данных на основе декларативных спецификаций // Вычислительные технологии. 2014. Т. 19. № 5. С. 85-100.
- [11] Еделев А. В., Сендеров С. М., Береснева Н. М., Сидоров И. А., Феокистов А. Г. Распределённая вычислительная среда для анализа уязвимости критических инфраструктур в энергетике // Системы управления, связи и безопасности. 2018. №3. С. 197-231.
- [12] Ahuja R K, Magnanti T L, Orlin J. B. Network flows: Theory, Algorithms, and Applications, 1993, Prentice-Hall, Inc.
- [13] P. Kovács. Minimum-cost flow algorithms: an experimental evaluation. Optimization Methods and Software, 2015, vol. 30, no. 1, pp. 94–127.
- [14] Храмов А.В., Еникеева С.М. и др. Программное и информационное обеспечение решения задач живучести Единой системы газоснабжения СССР // Методы и модели исследования живучести систем энергетики. Под ред. Руденко Ю.Н. Новосибирск: Наука, Сиб. отд. 1990. С.86-91
- [15] Клименко С.М., Сендеров С.М., Янченко В.А. Исследование проблем повышения устойчивости и экологической безопасности магистральных нефте- и нефтепродуктопроводов // Новые информационные технологии управления развитием и функционированием трубопроводных систем энергетики. Иркутск: СЭИ СО РАН, 1993. С. 119-127.
- [16] Zalitis, I., Dolgicers, A., Zemite, L., Ganter, S., Kopustinskas, V., Vamanu, B., Finger, J., Fuggini, C., Bode, I., Kozadajevs, J. and Häring, I., 2022. Mitigation of the impact of disturbances in gas transmission systems. International Journal of Critical Infrastructure Protection, 39, p.100569.
- [17] Ouyang M., Liu C., Xu M. Value of resilience-based solutions on critical infrastructure protection: Comparing with robustness-based solutions. Reliability Engineering & System Safety, 2019, 190, p.106506
- [18] Pluta, A., Medjroubi, W., Diettrich, J.C., Dasenbrock, J., Tetens, H.P., Sandoval, J.E. and Lünsdorf, O., 2022, April. SciGRID_gas-Data Model of the European Gas Transport Network. In 2022 Open Source Modelling and Simulation of Energy Systems (OSMSES). pp. 1-7.
- [19] Di Francesco, L., 2023. Modelling and Simulation of the German Gas Transmission Network with Hydrogen Blending (Doctoral dissertation, Politecnico di Torino).
- [20] Bestuzheva, K., Besançon, M., Chen, W.K., Chmiela, A., Donkiewicz, T., van Doornmalen, J., Eifler, L., Gaul, O., Gamrath, G., Gleixner, A. and Gottwald, L., 2023. Enabling research through the SCIP optimization suite 8.0. ACM Transactions on Mathematical Software, 49(2), pp.1-21.
- [21] Parallelizing the dual revised simplex method, Q. Huangfu and J. A. J. Hall, Mathematical Programming Computation, 10 (1), 119-142, 2018. DOI: 10.1007/s12532-017-0130-5.